Tentamen Lineaire Algebra 1, 18 april 2011

Hett tentamen bestaat uit 6 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. U moet de antwoorden beargumenteren. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de rang van A.

b. Laat de vector b gegeven zijn door

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de oplossingsverzameling $\mathcal{V}_1$ van het stelsel $Ax = b$.

c. Bepaal de oplossingsverzameling $\mathcal{V}_2$ van het homogene stelsel $Ax = 0$.

d. Wat is de dimensie van $\mathcal{V}_2$?

2. Stel $\mathcal{V}$ een vectorruimte.

a. Toon aan: $\mathcal{V}$ bevat precies één 0-element, d.w.z precies één element 0 met de eigenschap dat voor alle $x \in \mathcal{V}$ geldt: $x + 0 = x$.

b. Toon aan dat elke eindige verzameling vectoren in $\mathcal{V}$ die de 0-vector bevat lineair afhankelijk is.

c. Stel $\{v_1, v_2, v_3\}$ lineair onafhankelijke vectoren in $\mathcal{V}$. Bewijs dat $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ lineair onafhankelijk zijn.

3. Beschouw de afbeelding $L : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ gedefinieerd door

$$L(M) = M^T - M$$

a. Toon aan dat L een lineaire afbeelding is.

b. Bepaal de matrix van L ten opzichte van de standaard basis van $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

c. Bepaal de kern $\ker(L)$ van L.

d. Bepaal een basis van $\ker(L)$.

e. Bepaal de range $L(\mathbb{R}^{2\times 2})$ van L.

f. Bepaal een basis van $L(\mathbb{R}^{2\times 2})$.

4. Voor een gegeven positief geheel getal n is P_n de vectorruimte van alle polynomen van graad kleiner dan n, met reële coefficienten.

a. Geef een basis van P_n.

b. Bepaal de dimensie van P_n.

Laat S de deelverzameling zijn van P_n van alle polynomen p met de eigenschap dat $p(0) = 0$.

c. Laat zien dat S een deelruimte is van P_n.

d. Bepaal een basis van S.

e. Bepaal de dimensie van S.

5. Voor elk tweetal vectoren x en y in $\mathbb{R}^n$ noteren we door $x^T y$ het gebruikelijke skalaire product. Stel dat $\mathcal{W}$ een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$. We definieren het *orthogonale complement* $\mathcal{W}^\perp$ *van* $\mathcal{W}$ door:

$$\mathcal{W}^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T y = 0 \text{ voor alle } y \in \mathcal{W}\}.$$

a. Bewijs dat $\mathcal{W}^\perp$ een deelruimte is van $\mathcal{V}$.

b. Bewijs dat $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{0\}$.

c. Laat A een matrix zijn zodat $\mathcal{W} = R(A)$. Bewijs dat $\mathcal{W}^\perp = N(A^T)$.

6. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal het karakteristieke polynoom van A.

b. Bepaal de eigenwaarden van A.

c. Bepaal de eigenvectoren van A

d. Ga na of A diagonaliseerbaar is. Bepaal in dat geval een matrix T zodat $T^{-1}AT$ diagonaal is.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 15
Vraagstuk 2: 10
Vraagstuk 3: 20
Vraagstuk 4: 15
Vraagstuk 5: 15
Vraagstuk 6: 15